

全港小學數學比賽
創意解難 挑戰二
樣本試題一

學校名稱：_____

總分：

姓名：_____ (參賽編號 _____)

姓名：_____ (參賽編號 _____)

循環小數

指引

本卷共 4 頁。全卷佔 30 分。

簡介

相信大家都認識 $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857\dots$ 這個循環小數，其中重覆出現的數字組 142857 稱為「循環節」。將第一個循環節以後的數字全部略去，並在首末兩個數字（即“1”和

“7”）上方各添一個小點，寫成 $\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$ 。

任何一個分數 $\frac{n}{7}$ ($n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$)，都和“142857”這個循環節有關，例如：

$$\frac{2}{7} = 0.\dot{2}8571\dot{4}。$$

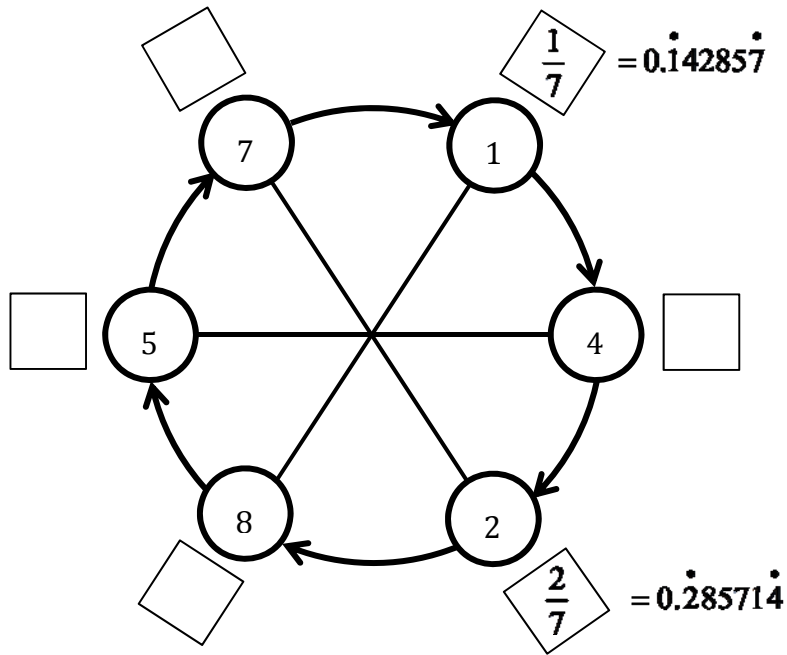
如下一頁圖 (a) 所示，將 1、4、2、8、5、7 依次以順時針方向排成一圓圈以表示這六個數字

的循環關係。由於 $\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$ ，其循環節以 1 為首，我們在 1 旁邊的空格內填寫 $\frac{1}{7}$ 。

同樣，由於 $\frac{2}{7} = 0.\dot{2}8571\dot{4}$ ，其循環節以 2 為首，我們在 2 旁邊的空格內填寫 $\frac{2}{7}$ 。

(1) 請在圖(a) 的空格內填寫適當的分數。

(4 分)



圖(a)

(2) 把以上每個分數的「循環節」中的 6 個數字分成兩組，每組均為一個三位數。假設首三個數字組成的三位數為 a ，而尾三個數字組成的三位數為 b 。完成下表，並仔細觀察，試找出 a 和 b 的關係，並以數式表達它們的關係。

(4 分)

分數	循環節	a	b	a 和 b 的關係式
$\frac{1}{7}$	142857	142	857	
$\frac{2}{7}$	285714	285	714	
$\frac{3}{7}$				
$\frac{4}{7}$				
$\frac{5}{7}$				
$\frac{6}{7}$				

- (3) 已知 $\frac{1}{17}$ 是一個有 16 位循環節的循環小數，而且將這 16 位循環節分成兩組 8 位數後，這兩個 8 位數跟上題 a 和 b 有十分類似的關係。下面給你首 8 個位數字，試寫出其餘的數字。

(2 分)

$$\frac{1}{17} = 0.\dot{0}5882352 \quad \boxed{}$$

- (4) 下面各循環小數都已列出循環節的首 8 個位數字，試寫出其餘的數字。

(4 分)

(a) $\frac{2}{17} = 0.\dot{1}1764705 \quad \boxed{}$

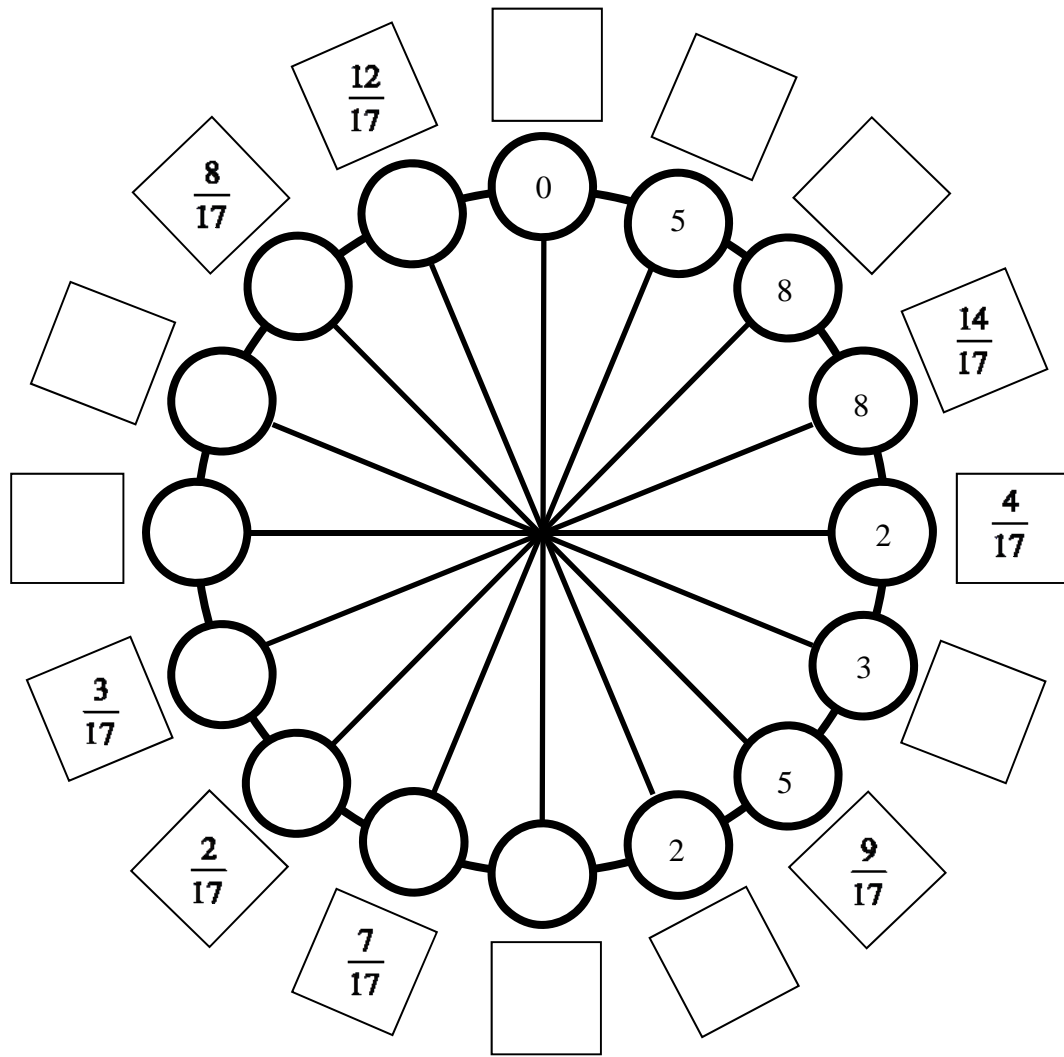
(b) $\frac{8}{17} = 0.\dot{4}7058823 \quad \boxed{}$

(c) $\frac{9}{17} = 0.\dot{5}2941176 \quad \boxed{}$

(d) $\frac{14}{17} = 0.\dot{8}2352941 \quad \boxed{}$

- (5) 為了方便記憶，偉明將循環小數 $\frac{1}{17} = 0.05882352\dots$ 的 16 位循環節以圖(a) 的方式表達並得出圖(b)。試在圖(b) 的圓圈內依次填寫循環節的其餘數字，並將適當的分數填寫在其循環節的首位數字旁邊的空格內。

(16 分)



圖(b)

全卷完

全港小學數學比賽
創意解難 挑戰二
樣本試題二

學校名稱：_____

總分：

姓名：_____ (參賽編號 _____)

姓名：_____ (參賽編號 _____)

凱撒密碼

指引

本卷共 3 頁。全卷佔 30 分。

簡介

- A. 凱撒密碼 (Caesar's Cipher) 相傳是凱撒大帝將他的信息加密後與軍隊溝通的方法。方法很簡單，將信息 (稱為「明文」) 中的每一個字母從一個方向偏移固定數目後便產生「密文」。如表一所示，當明文的 26 個英文字母向右移動 7 格後，A 就變成 H，B 就變成 I，如此類推。

明文	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
密文	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G

表一

- B. 在此挑戰題中，需要應用「同餘」的概念。現在先簡介一下：

當 7 和 19 分別除以 4 時，餘數都是 3，即 $7 \div 4 = 1 \dots 3$ 及 $19 \div 4 = 4 \dots 3$ 。

那麼我們可以說，7 和 19 是同餘的。為要說明其中的除數是 4，我們會用以下的記號：

$$7 \equiv 19 \pmod{4}$$

再舉一個例子：

28 和 54 分別除以 26 時，餘數都是 2，所以對於除數 26 來說，兩個數字是同餘的。

用數學記號：

$$28 \equiv 54 \pmod{26}$$

現在讓我們計算一條數式的同餘值：

考慮數式 $b = 11 \times a + 23 \pmod{26}$ 。

當 $a = 2$ 時， b 原來的值為 $11 \times 2 + 23 = 45$ 。45 除以 26 時，餘數是 19，

即 $45 \div 26 = 1 \dots 19$ ，

所以當 $a = 2$ 時， $b \equiv 19 \pmod{26}$ 。

換言之，要計算一條數式的同餘值，首先計算它的原來值，然後除以括號內的數字，得出餘數。

任務一

利用下表的加密方法將密文翻譯出來，然後根據所提供的信息回答以下各題（中、英皆可）。

明文	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
密文	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G

密文：

AOL ISBL DOHSL PZ AOL SHYNLZA HUPTHS.

AOLYL HYL ADV NYVBWZ VM DOHSLZ – IHSLLU HUK AVVAOLK.

ISBIILY PZ DOHA THRLZ DOHSLZ MSVHA.

題目 1：

全世界最大的動物是甚麼？

(4 分)

題目 2：

哪一個器官使這種動物浮起？

(4 分)

題目 3：

這種動物可分為哪兩類？

(6 分)

任務二

原來，任務一所採用的加密方法是很容易給人識破的。現為每一個字母定一個 0 至 25 的不同的數字（即 a ），然後利用一條換算數式 $b = 3 \times a + 17 \pmod{26}$ 得出 b 的值，再將每一個 b 的值轉換為原本所設定的字母，那就成為「密文」了。

題目 4：

完成下表。

(10 分)

明文	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
b	17			0			9			18	21	24	1	4	7	10	13	16			25			8	11	14	
密文	R			A			J			S	V	Y	B	E	H	K	N	Q			Z				I	L	O

題目 5：

(6 分)

利用題目 4 的加密方法，翻譯以下的密文並用英文寫出明文（大、小楷均可）。

BRWMDBRWPXT PT GZE

全卷完